Практическое предсказание с использованием экспертов-специалистов

Юрий Калнишкан,
Дмитрий Адамский, Алексей Чернов и Tim Scarfe

Department of Computer Science
and Computer Learning Research Centre
Royal Holloway, University of London

Апрель 2015

Содержание

Задача

- задача "What do you know?" // "Что вы знаете?" была поставлена на kaggle.com компанией Grockit
- база данных состоит из примеров такого типа:
  1. номер студента
  2. номер вопроса
  3. время ответа
  4. характеристики вопроса: тип, подтип, метки
  5. исход: правильно ли студент ответил на вопрос
- нужно предсказывать, правильно ли ответит студент на вопрос

Постановка

- на сайте предполагается пакетная (batch) постановка:
  — дана обучающая выборка (несколько миллионов примеров)
  — надо предсказать исходы на тестовой выборке
  — допускаются предсказания из интервала $[0.01, 0.99]$ и успех меряется логарифмическим правдоподобием
- построение тестовой выборки:
  — случайно выбраны студенты, отвечавшие на достаточно много вопросов
  — для каждого случайно выбран момент времени
  — один вопрос помещается в тестовую выборку; все вопросы, на которые студент отвечал после него, удаляются из обучающей выборки

Модель Раша

- стандартный подход к задаче связан с моделью Раша (Rasch model)
- для студента i введём параметр α_i – силу студента
- для вопроса j введём параметр β_j – сложность вопроса
- модель Раша предполагает

$$\Pr(\text{верного ответа}) = \frac{e^{\alpha_i - \beta_j}}{1 + e^{\alpha_i - \beta_j}}$$

- параметры α_i и β_j подбираются на обучающей выборке

Он-лайн постановка (1)

- рассмотрим задачу в он-лайн постановке:

  (1) FOR $t = 1, 2, \ldots$
  (2) предсказатель получает сигнал x_t
  (3) предсказатель выдаёт предсказание $\gamma_t \in \Gamma$
  (4) предсказатель наблюдает исход $\omega_t \in \Omega$
  (5) предсказатель несёт потери $\lambda(\gamma_t, \omega_t)$
  (6) END FOR
- в данной задаче
  — пространство исходов $\Omega = \{0, 1\}$
  — пространство предсказаний $\Gamma = [0.01, 0.99]$
  — функция потерь

$$\lambda(\gamma, \omega) = \begin{cases} -\ln \gamma, & \text{если } \omega = 1 \\ -\ln(1-\gamma), & \text{если } \omega = 0 \end{cases}$$

Он-лайн постановка (2)

- качество предсказаний меряется кумулятивными потерями

$$\text{Loss}(T) = \sum_{t=1}^{T} \lambda(\gamma_t, \omega_t)$$

- в он-лайн постановке мы предсказываем все исходы на основании предыстории

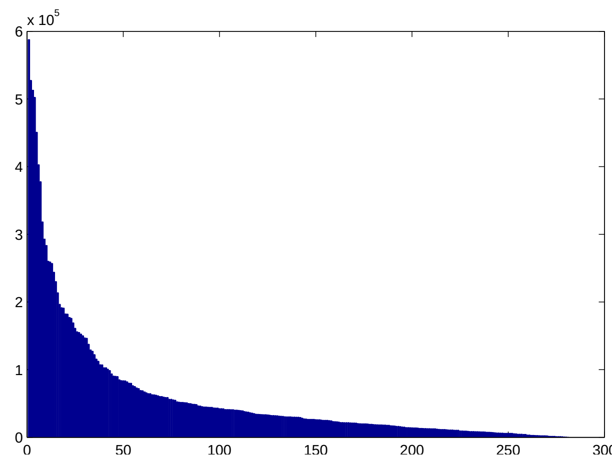
Применение модели Раша

- модель Раша представляет собой логистическую регрессию — сигнал x_t можно представить как вектор-индикатор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ номеров студента и вопроса
- логистическую регрессию можно довольно быстро проводить в он-лайн режиме:

Метки

- мы хотим использовать метки, проставленные к вопросам
- всего имеется 281 тип меток; примеры:
  — Multiple Choice (Вопрос с выбором варианта ответа)
  — Elementary Algebra (Элементарная алгебра)
  — Quadratic Equations (Квадратичные уравнения)
  — Humanities (Гуманитарные науки)
  — English (Английский)
  — RC: Author Would Agree/Disagree (Понимание прочитанного: позиция автора)
- система довольно хаотична

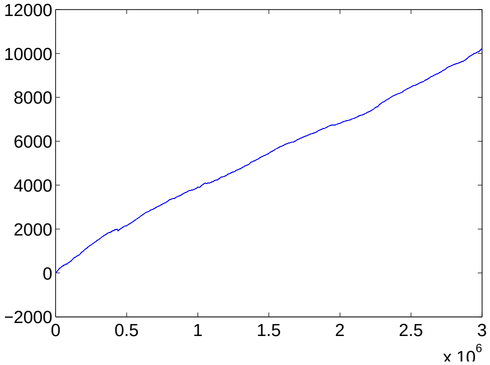
Частотность меток



- самая популярная метка: Problem solving (решение задач)

Наивный подход

- добавим метки в логистическую регрессию: расширим вектор сигналов x_t, добавив индикаторы меток
- результат ухудшается:



На графике показана разность $\mathrm{Loss}_{\text{наивный}}(t) - \mathrm{Loss}_{\text{Rasch}}(t)$

Объяснение

- в модели Раша члены, соответствующие меткам, смысла не имеют:

$$\Pr(\text{верного ответа}) = \frac{e^{\alpha_i - \beta_j + \mu_k + \mu_l}}{1 + e^{\alpha_i - \beta_j + \mu_k + \mu_l}}$$

  k и l – метки при вопросе j
- члены μ_k и μ_l могут иметь смысл только как показатели сложности вопроса
- но сложность вопроса уже передаётся членом β_j
- хотелось бы менять силу студента в зависимости от меток, но не понятно, как это сделать в модели

Идея

- заведём по модели Раша для каждой метки
- но метки перекрываются (и это правило, а не исключение); как получать предсказание?
  — информативность и предсказательная ценность меток сильно варьируются
- будем применять методы предсказания с использованием совета экспертов (prediction with expert advice)

Протокол

- последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$ (пространство исходов) вместе с нами исходы предсказывают N экспертов $E_1, E_2, \ldots, E_N$
- допустимы предсказания из пространства предсказаний Γ
- качество предсказаний оценивается функцией потерь $\lambda : \Gamma \times \Omega \to [0, +\infty]$
- протокол:

(1) FOR $t = 1, 2, \ldots$
(2) эксперты выдают предсказания $\gamma_t^n \in \Gamma$, $n = 1, \ldots, N$
(3) предсказатель выдаёт $\gamma_t \in \Gamma$
(4) случается исход $\omega_t \in \Omega$
(5) предсказатель несёт потери $\lambda(\gamma_t, \omega_t)$
(6) эксперты несут потери $\lambda(\gamma_t^n, \omega_t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$
(7) END FOR

Задача

- мы хотим, чтобы наши кумулятивные потери

$$\text{Loss}(T) = \sum_{t=1}^{T} \lambda(\gamma_t, \omega_t)$$

были не (намного) хуже, чем у любого эксперта E_n

$$\text{Loss}_{E_n}(T) = \sum_{t=1}^{T} \lambda(\gamma_t^n, \omega_t)$$

- т.е., мы хотим гарантий вида $\text{Loss}(T) \lesssim \text{Loss}_{E_n}(T)$ для всех n и T
- дальше будет вкратце рассказан агрегирующий алгоритм Вовка

Инвестирование

- рассмотрим задачу инвестирования в N акций
- каждый день t инвестор может переложить деньги между акциями, вкладывая долю p_t^n от своего капитала в акцию n
- между днём t и $t+1$ цена акции n меняется в u_t^n раз
  — деньги, вложенные в акцию n растут в u_t^n раз
  — весь капитал меняется в $\sum_{n=1}^{N} p_t^n u_t^n$ раз

(1) инвестор начинает с капитала $W_0 = 1$
(2) FOR $t = 1, 2, \ldots$
(3) инвестор выдаёт распределение $p_t = (p_t^1, p_t^2, \ldots, p_t^N) \in \mathbb{P}_N$
(4) цены акций меняются в $u_t = (u_t^1, u_t^2, \ldots, u_t^N) \in [0, +\infty]^N$ раз
(5) капитал инвестора изменяется как $W_t = W_{t-1} \cdot \langle p_t, u_t \rangle$
(6) END FOR

$\mathbb{P}_N \subseteq \mathbb{R}^N$ это симплекс

Либеральная стратегия

- поделим капитал один раз между акциями поровну и не будем перекладывать
  — если цена акции растёт, доля капитала, вложенная в неё, автоматически увеличивается
- пусть W_t^n это капитал, который был бы у нас на шаге t, если бы мы вложили все деньги в акцию n
- либеральная стратегия обеспечивает нам

$$W_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} W_t^n$$

- выкидывая из суммы все члены кроме одного, получаем гарантию

$$W_t \geq \frac{1}{N} W_t^n$$

Оптимальность

- коэффициент $1/N$ в гарантии нельзя повысить:
  — на первом же шаге инвестор вкладывает $1/N$ или меньше в одну из акций
  — пусть все акции кроме этой обвалятся до 0

Пересчёт весов

- вес p_t^n это доля акции n в нашем капитале:

$$p_t^n = \frac{\frac{1}{N} W_{t-1}^n}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} W_{t-1}^k}$$

- при переходе к следующему шагу W_{t-1}^n умножается на u_t^n:

$$p_{t+1}^n \propto p_t^n u_t^n$$

Связь с формулой Байеса

- пусть у нас есть N гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_N$ с априорными вероятностями $\Pr(H_n) = \frac{1}{N}$
- на шаге t происходит событие ω_t, которому гипотезы приписывают вероятности

$$\Pr(\omega_t \mid H_n, \omega_1, \ldots, \omega_{t-1}) = u_t^n$$

- тогда

$$\Pr(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t \mid H_n) = u_1^n u_2^n \cdots u_t^n = W_t^n$$

- апостриорная вероятность

$$p_t^n = \Pr(H_n \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t) \propto \Pr(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t \mid H_n) \Pr(H_n) = \frac{1}{N} W_t^n$$

Аддитивная формулировка

- перейдём от капитала к потерям
- введём $\ell_t^n = -\ln u_t^n$ (логарифм превращает мультипликативную величину в аддитивную, а минус капитал в потери)
- рассмотрим игру с n экспертами

(1) FOR $t = 1, 2, \ldots$
(2) “инвестор” выдаёт распределение $p_t = (p_t^1, p_t^2, \ldots, p_t^N) \in \mathbb{P}_N$
(3) эксперты несут потери $\ell_t^n \in [0, +\infty]$, $n = 1, 2, \ldots, N$
(4) “инвестор” несёт потери $\ell_t = -\ln \sum_{n=1}^N p_t^n e^{-\ell_t^n}$
(5) END FOR

Гарантия

- либеральная стратегия гарантирует нам, что

$$\sum_{t=1}^{T} \ell_t \le \sum_{t=1}^{T} \ell_t^n + \ln N$$

Предсказание с использованием советов экспертов (1)

- вернёмся к протоколу с предсказаниями γ_t, исходами ω_t и потерями $\lambda(\gamma_t, \omega_t)$
- пусть потери эксперта это $\lambda(\gamma_t^n, \omega_t) = \ell_t^n$
- веса мы можем считать как и раньше:

$$p_{t+1}^n \propto p_t^n e^{-\ell_t^n}$$

- но как подобрать подходящее предсказание?
- выдавая предсказание γ_t, мы ещё не знаем ω_t, так что γ_t надо выбрать удовлетворяющим системе неравенств

$$\lambda(\gamma_t, \omega) \le -\ln \sum_{n=1}^{N} p_t^n e^{-\lambda(\gamma_t, \omega)}$$

для всех $\omega \in \Omega$
- геометрические свойства λ могут сделать это невозможным

Предсказание с использованием советов экспертов (2)

- ослабим требования
  — введём параметр η и положим $\ell_t^n = \eta\lambda(\gamma_t, \omega_t)$
  — пусть $C(\eta)$ это минимальное положительное число, такое что для любого набора $\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^N \in \Gamma$ и распределения $p = (p^1, p^2, \ldots, p^N) \in \mathbb{P}_N$ найдётся $\gamma \in \Gamma$ такое что для любого $\omega \in \Omega$

$$\lambda(\gamma, \omega) \le -\frac{C(\eta)}{\eta} \ln \sum_{n=1}^{N} p_t^n e^{-\eta\lambda(\gamma_t, \omega)}$$

(т.е., мы можем решить систему, ухудшенную в $C(\eta)$ раз)

Агрегорующий алгоритм Вовка

параметры: η и начальное распределение на экспертах $q_1, q_2, \ldots, q_N$

(1) инициализируем веса $w_1^n = q_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$
(2) FOR $t = 1, 2, \ldots$
(3) считываем предсказания экспертов γ_t^n, $n = 1, 2, \ldots, N$
(4) нормируем веса $p_t^n = w_t^n / \sum_{n=1}^{N} w_t^n$
(5) решаем систему ($\omega \in \Omega$): $\lambda(\gamma, \omega) \le -\frac{C(\eta)}{\eta} \ln \sum_{n=1}^{N} p_t^n e^{-\eta\lambda(\gamma_t^n, \omega)}$ относительно γ и выдаём решение γ_t
(6) наблюдаем исход ω_t
(7) обновляем веса экспертов $w_{t+1}^n = w_t^n e^{-\eta\lambda(\gamma_t^n, \omega)}$, $n = 1, 2, \ldots, N$
(8) END FOR

Гарантия

- при равномерном исходном распределении

$$\mathrm{Loss}(T) \le C(\eta)\,\mathrm{Loss}_{E_n}(T) + \frac{C(\eta)}{\eta}\ln N$$

- оптимальность [Vovk, 1998]: если какой-то алгоритм гарантирует

$$\mathrm{Loss}(T) \le A\,\mathrm{Loss}_{E_n}(T) + B\ln N \quad ,$$

то агрегирующий алгоритм при некотором η даёт такую же или лучшую гарантию

Эксперты-специалисты

- эксперт-специалист может отказаться от предсказания — мы говорим, что эксперт спит на шаге t
- мы хотим, чтобы наши потери на шагах, когда E_n не спал, были не сильно хуже
- эксперты-специалисты введены в [Freund et al, 1997]
- мы опишем работу с ними по [Vovk and Chernov, 2009]

Обработка экспертов-специалистов (1)

- припишем спящим экспертам наши потери ℓ_t — но это порочный круг – как мы рассчитаем ℓ_t?
- экспоненциируем уравнение $\ell_t = -\ln \sum_{n=1}^N p_t^n e^{-\ell_t^n}$ и отделим члены соответствующие спящим экспертам:

$$e^{-\ell_t} = \sum_{\substack{1\le n\le N\\ E_n \text{ не спит}}} p_t^n e^{-\ell_t^n} + \sum_{\substack{1\le n\le N\\ E_n \text{ спит}}} p_t^n e^{-\ell_t}$$

- сокращая, получаем

$$e^{-\ell_t} = -\frac{1}{Z_t}\sum_{\substack{1\le n\le N\\ E_n \text{ не спит}}} p_t^n e^{-\ell_t^n} \quad ,$$

где Z_t это суммарный вес спящих экспертов

Обработка экспертов-специалистов (2)

- изменения, вносимые в агрегирующий алгоритм, минимальны
- для получения предсказания используются бодрствующие эксперты, а их веса перенормировываются
- для пересчёта весов спящих экспертов для следующего шага используется $C(\eta)\lambda(\gamma_t,\omega_t)$

Гарантия

- для каждого эксперта E_n имеем гарантию

$$\mathrm{Loss}^n(T) \le C(\eta)\,\mathrm{Loss}_{E_n}(T) + \frac{C(\eta)}{\eta}\ln N \ ,$$

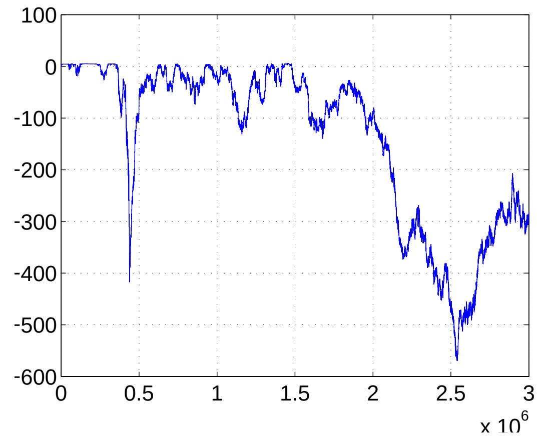
где

$$\mathrm{Loss}^n(T) = \sum_{\substack{1\le t\le T\\ E_n \text{ не спал}\\ \text{на шаге } t}} \lambda(\gamma_t, \omega_t)$$

Применение экспертов-специалистов

- для каждой метки заведём эксперта-специалиста, который отслеживает вопросы с этой меткой и строит модель Раша — плюс оставим глобальную модель
- функция потерь допускает $C(\eta) = 1$ при максимальном $\eta = 1$
  — если $C(\eta) = 1$ возможно, мы говорим, что игра смешиваемая
- аддитивный член в гарантии $\ln 282 \approx 5.64$

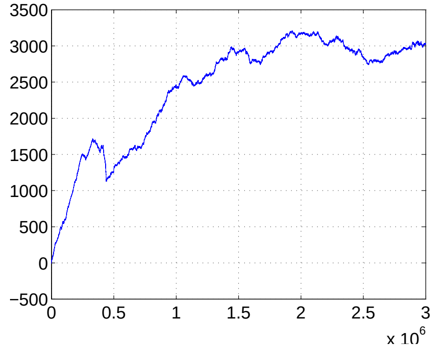
Результат



$\mathrm{Loss}_{\text{AA со специалистами}}(t) - \mathrm{Loss}_{\text{Rasch}}(t)$

Обсуждение (1)

- нельзя выкинуть глобальную модель:

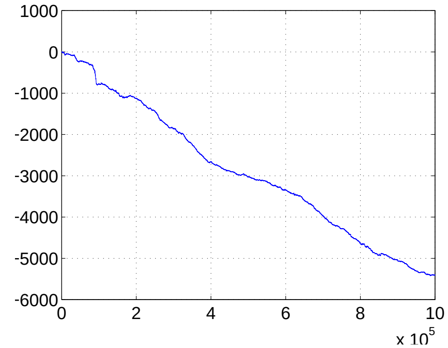


$\text{Loss}_{\text{AA только метки}}(t) - \text{Loss}_{\text{Rasch}}(t)$

- глобально эксперты с метками не очень хороши, но позволяют местами улучшить картину

Обсуждение (2)

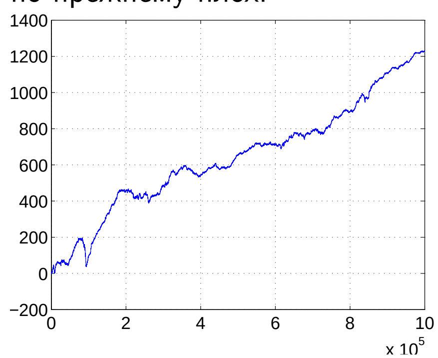
- где же новый метод хорош?
- выбросим из базы студентов, отвечавших меньше, чем на 1000 вопросов; останется около миллиона примеров



$\text{Loss}_{\text{AA со специалистами}}(t) - \text{Loss}_{\text{Rasch}}(t)$

Обсуждение (3)

- наивный метод, включающий теги в регрессию, по-прежнему плох:



$\text{Loss}_{\text{наивный}}(t) - \text{Loss}_{\text{Rasch}}(t)$

Опцион

- опцион на акцию это контракт такого вида:

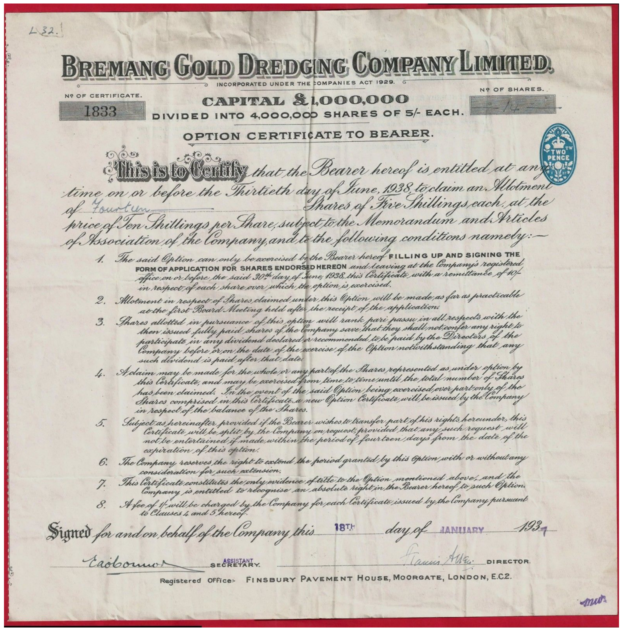
  > Податель сего может купить акцию ABC ltd в декабре 2015 года по цене 10$.

купить: опцион на покупку называется *колл*, а на продажу – *пут*

акцию: финансовый инструмент, с которым проводится сделка, называется *базовым активом*; им может быть акция, фьючерс, индекс и т.д.

декабрь: опцион содержит дату исполнения/погашения опциона; владелец опциона может решить, использовать его или нет (данный опцион будет исполнен, если цена акции в декабре 2015 года превысит 10$)
— биржа (как правило) фиксирует четыре даты погашения в году и допускает опционы только с этими датами

10$: цена, записанная в контракте, называется *страйком*


L32.

BREMANG GOLD DREDGING COMPANY LIMITED.

INCORPORATED UNDER THE COMPANIES ACT 1929.

№ OF CERTIFICATE. 1833

CAPITAL £1,000,000
DIVIDED INTO 4,000,000 SHARES OF 5/- EACH.

№ OF SHARES. 14

OPTION CERTIFICATE TO BEARER.

TWO PENCE

This is to Certify that the Bearer hereof is entitled at any time on or before the Thirtieth day of June, 1938, to claim an Allotment of Fourteen Shares of Five Shillings each, at the price of Ten Shillings per Share, subject to the Memorandum and Articles of Association of the Company, and to the following conditions namely:—

1. The said Option can only be exercised by the Bearer hereof FILLING UP AND SIGNING THE FORM OF APPLICATION FOR SHARES ENDORSED HEREON and leaving at the Company's registered office on or before the said 30th day of June, 1938, this Certificate with a remittance of 10/- in respect of each share over which the option is exercised.
2. Allotment in respect of Shares claimed under this Option will be made as far as practicable at the first Board Meeting held after the receipt of the application.
3. Shares allotted in pursuance of this option will rank pari passu in all respects with the then issued fully paid shares of the Company save that they shall not confer any right to participate in any dividend declared or recommended, to be paid by the Directors of the Company before or on the date of the exercise of the Option notwithstanding that any such dividend is paid after that date.
4. A claim may be made for the whole or any part of the Shares represented as under option by this Certificate, and may be exercised from time to time until the total number of Shares has been claimed. In the event of the said Option being exercised over part only of the Shares comprised in this Certificate, a new Option Certificate will be issued by the Company in respect of the balance of the Shares.
5. Subject as hereinafter provided if the Bearer wishes to transfer part of his rights hereunder, this Certificate will be split by the Company on request, provided that any such request will not be entertained if made within the period of fourteen days from the date of the expiration of this option.
6. The Company reserves the right to extend the period granted by this Option with or without any consideration for such extension.
7. This Certificate constitutes the only evidence of title to the Option mentioned above, and the Company is entitled to recognise an absolute right in the Bearer hereof to such Option.
8. A fee of 1/- will be charged by the Company for each Certificate issued by the Company pursuant to Clauses 4 and 5 hereof.

Signed for and on behalf of the Company this 18TH day of JANUARY 1937

ASSISTANT SECRETARY. DIRECTOR.

Registered Office:- FINSBURY PAVEMENT HOUSE, MOORGATE, LONDON, E.C.2.

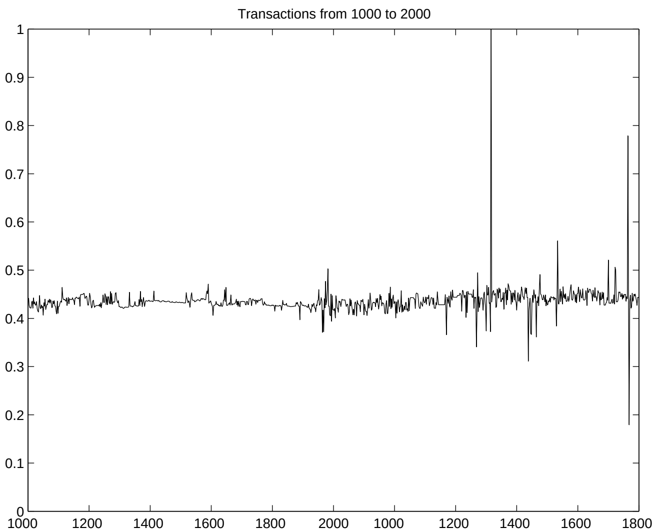
Подразумеваемая волатильность

- имеется лог-файл с биржи РТС с записями всех сделок с опционом на фиксированный актив с фиксированной датой исполнения
- по параметрам транзакции можно рассчитать неявную волатильность σ
- по теории Блэка-Шоулза(-Мёртона) неявная волатильность должна быть одинакова для всех опционов на данный актив в любой момент времени
- на практике это не так
  — график зависимости волатильности от страйка называется улыбкой волатильности
  — зависимость от страйка и времени до исполнения называется поверхностью волатильности

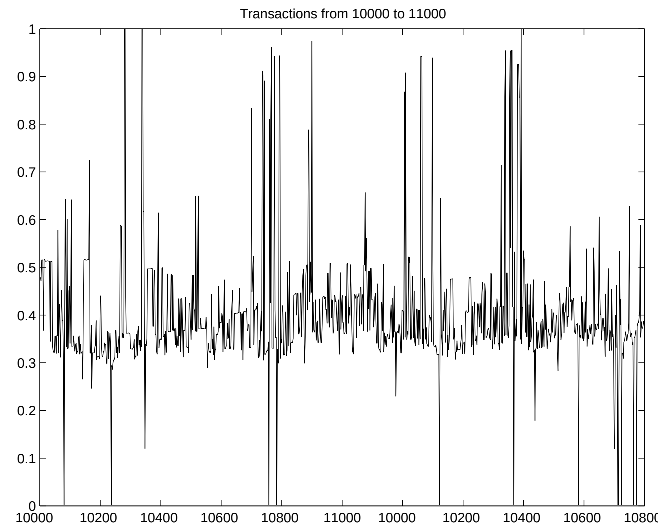
Пример

- посмотрим на опционы на акции РАО ЕЭС с исполнением в декабре 2006
  — всего около 13000 сделок

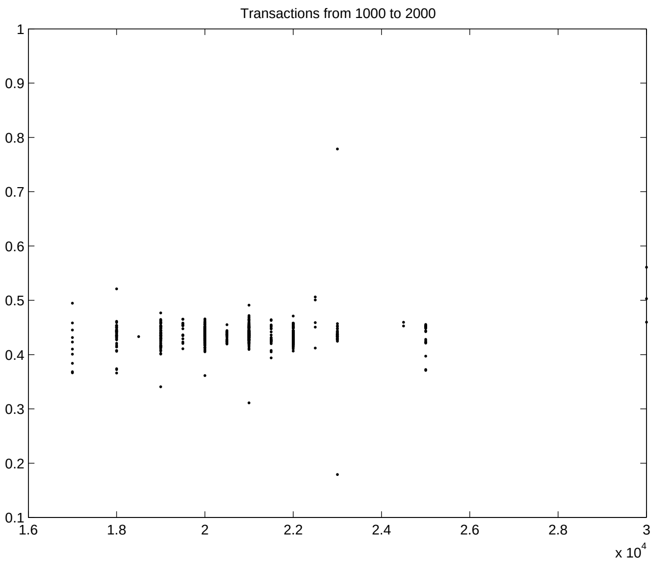
Волатильность и номер сделки, 1000-2000



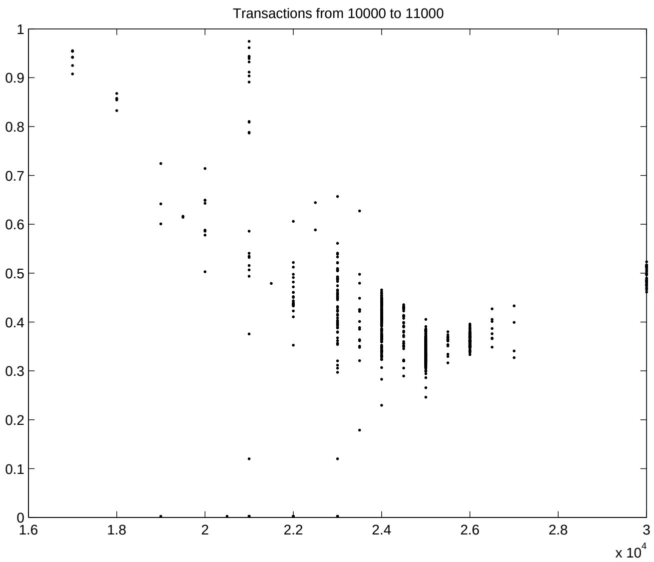
Волатильность и номер сделки, 10000-11000



Волатильность и страйк, 1000-2000



Волатильность и страйк, 10000-11000



Базовый алгоритм

- рассмотрим элементарный метод предсказания: будем предсказывать неявную волатильность сделки по неявной волатильности из предыдущих сделок по опциону с тем же страйком
  — поток транзакций расслаивается на временные ряды
  — применяем простое сглаживание по времени: скользящее среднее с экспоненциальными весами; элементы ряда $y_1, y_2, \ldots$ предсказываем величинами $\hat{y}_t$:

$$\hat{y}_{t+1} = \mu y_t + (1-\mu)\hat{y}_t$$

Проблема

- сделки в основном происходят с центральными страйками
- на краях сделки редки и ближайшая сделка с тем же страйком может быть довольно далеко в прошлом
- иногда вместо индивидуальных страйков лучше рассматривать окрестности страйков
  — но каков их оптимальный размер?
  — по краям выше чем в центре
- применим экспертов-специалистов

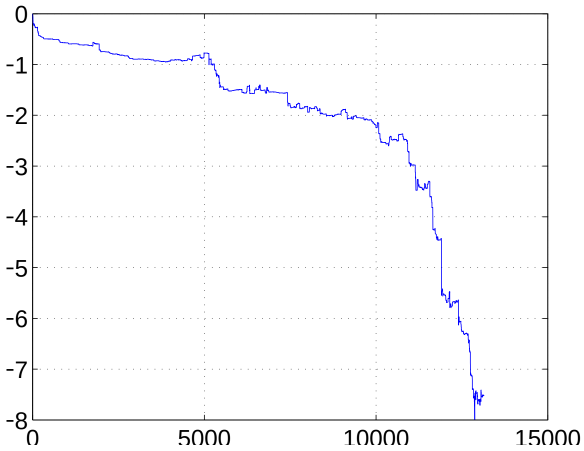
Эксперты-специалисты

- рассмотрим все окрестности – множества состоящие из последовательных страйков $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ где $k \le D$ (D – максимальный диаметр окрестности)
- с каждой окрестностью свяжем трёх экспертов:
  1. эксперт, работающий на сделках с опционами со страйками из данной окрестности
  — эксперт строит временной ряд из волатильностей по сделкам из его окрестности и предсказывает его используя экспоненциальное сглаживание
  — если страйк не попадает в окрестность, эксперт спит
  2. эксперт, работающий с опционами колл со страйками из данной окрестности
  3. эксперт, работающий с опционами пут со страйками из данной окрестности

Смешивание

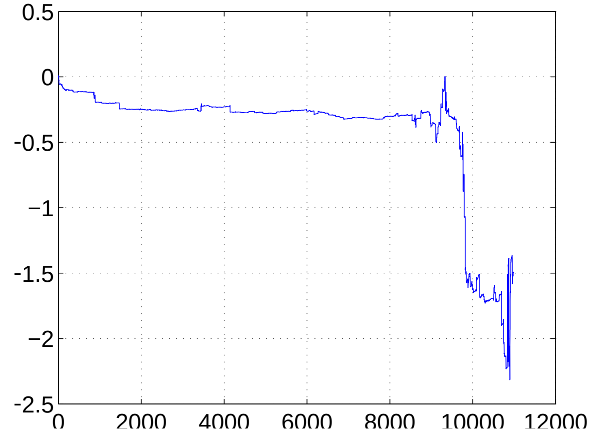
- настройка максимального диаметра D и параметра μ улучшают результаты
- мы не будем подбирать параметры и просто смешаем все стратегии используя агрегирующий алгоритм:
  — смешиваем всех экспертов-специалистов с окрестностями размера от 1 до D
  — смешиваем по всем D и $\mu = 0.2, 0.25, 0.3, \ldots, 1$
- уклонение будем мерять квадратичными потерями $\lambda(\gamma, \omega) = (\gamma - \omega)^2$
  — принимая за интервал исходов и предсказаний $[0, 1]$, получаем $C(\eta) = 1$ при $\eta = 2$
- для наивного алгоритма рестроспективно выбираем μ, при котором минимизируются общие кумулятивные потери

РАО ЕЭС



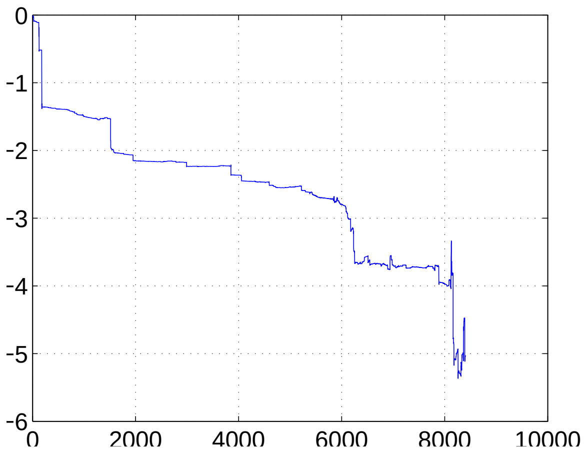
$\text{Loss}_{AA}(t) - \text{Loss}_{\text{наивный}}(t)$
у наивного алгоритма $\mu = 0.6$

Газпром



$\text{Loss}_{AA}(t) - \text{Loss}_{\text{наивный}}(t)$
у наивного алгоритма $\mu = 0.55$

Индекс РТС



$\text{Loss}_{AA}(t) - \text{Loss}_{\text{наивный}}(t)$
у наивного алгоритма $\mu = 0.9$